OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 07 FEBRUARIE 2026

CLASA a V - a

PROBLEMA 1 (25 puncte)

Se consideră suma S = 18 + 19 + 20 + ... + 2026.
a) Calculați suma S.
b) Stabiliți dacă S este divizibilă cu 3.
c) Determinați restul împărțirii lui S la 25.

PROBLEMA 2 (25 puncte)

Fie numărul natural $a = 3^{2n+1} + 2 \cdot 9^n$, unde n este număr natural.

a) Arătați că numărul a este divizibil cu 5.
b) Determinați ultima cifră a numărului a:5, pentru orice număr natural par n.
c) Arătați că numărul $\frac{a}{5} + 3^{2n+1}$ este pătrat perfect oricare ar fi n număr natural.

PROBLEMA 3 (20 puncte)

Un număr natural de trei cifre împărțit la răsturnatul său dă câtul 3 și restul 175. Diferența dintre cifra sutelor și cifra unităților este 7. Determinați numărul.

GM 9/2025_E: 17287
Ștefan Gobej, elev, Curtea de Argeș

PROBLEMA 4 (20 puncte)

Într-o cutie sunt bile roșii și bile albastre. Dacă înlocuim fiecare bilă roșie cu 3 bile albastre, numărul total de bile crește cu 2026. Știind că inițial în cutie erau 1500 de bile, determinați câte bile roșii și câte bile albastre erau inițial.

Notă: Timp de lucru: 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Punctajul maxim total este de 100 puncte.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 07 FEBRUARIE 2026

CLASA a V– a

BAREM DE EVALUARE

PROBLEMA 1(25 puncte)

Se consideră suma S = 18 + 19 + 20 + ... + 2026.
a) Calculați suma S.
b) Stabiliți dacă S este divizibilă cu 3.
c) Determinați restul împărțirii lui S la 25.

SOLUȚIE/BAREM	Punctaj
Punctul a)	
Suma începe cu 18 și se termină cu 2026, deci sunt 2026 − 18 + 1 termeni, adică 2009 termeni.	**4 p**
Se împerechează primul cu ultimul, al doilea cu penultimul etc. 18 + 2026 = 2044 19 + 2025 = 2044 20 + 2024 = 2044 ... Fiecare pereche are suma 2044.	**4 p**
Cum sunt 2009 termeni (număr impar), obținem 1004 perechi și rămâne un termen în mijloc. Termenul din mijloc este 1022 (este exact la jumătatea dintre 18 și 2026). Deci: S = 1004 · 2044 + 1022 = 2053198.	**4 p**
Soluție alternativă: $\mathbf{S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 17 + 18 + 19 + \cdots + 2026 - (1 + 2 + 3 + \cdots + 17)}$	**7 p**
$\mathbf{S = (2026 \cdot 2027) : 2 - (17 \cdot 18) : 2}$**=2053351-153=2053198**	**5 p**
Punctul b)	
Criteriul de divizibilitate cu 3: Un număr este divizibil cu 3 dacă suma cifrelor lui este divizibilă cu 3.	**3 p**
S = 2053198, deci suma cifrelor este 2 + 0 + 5 + 3 + 1 + 9 + 8 = 28.	**2 p**
Concluzie: 28 nu este divizibil cu 3, deci S nu este divizibilă cu 3.	**2 p**
Soluție alternativă: **Efectuează împărțirea lui S la 3 și arată că nu este împărțire exactă (se obține rest 1).**	**5 p**
Concluzia, S $\not\vdots$ 3.	**2 p**

Punctul c)	
La împărțirea la 25, contează doar ultimele două cifre ale numărului.	**2 p**
Ultimele două cifre ale lui S: S = 2053198, deci ultimele două cifre sunt 98.	**2 p**
Împărțim 98 la 25: 98 = 25·3 + 23, deci restul este 23.	**2 p**
Soluție alternativă: **Face împărțirea lui S la 25 și găsește restul 23**	**6 p**

PROBLEMA 2 (25 puncte)

Fie numărul natural $a = 3^{2n+1} + 2\cdot 9^n$, unde n este număr natural.

a) Arătați că numărul a este divizibil cu 5.
b) Determinați ultima cifră a numărului a:5, pentru orice număr natural par n.
c) Arătați că numărul $\frac{a}{5} + 3^{2n+1}$ este pătrat perfect oricare ar fi n număr natural.

SOLUȚIE/BAREM	Punctaj
Punctul a)	
Observarea relației $9 = 3^2$ și rescrierea $9^n = 3^{2n}$	**4 p**
Înlocuirea în expresia lui a: $a = 3^{2n+1} + 2\cdot 3^{2n}$	**4 p**
Scoaterea factorului comun 3^{2n}: $a = 3^{2n}\cdot(3+2) = 5\cdot 3^{2n} \Rightarrow$ a divizibil cu 5	**4 p**
Punctul b)	
Din punctul a) se obține $a:5 = 3^{2n}$	**2 p**
Stabilirea ciclului ultimelor cifre ale puterilor lui 3: 3, 9, 7, 1	**3 p**
Pentru n par: 2n multiplu de 4 ⇒ ultima cifră a lui 3^{2n} este 1 ⇒ ultima cifră a lui a:5 este 1.	**2 p**
Soluție alternativă: **Dacă n este par rezultă că $n = 2k, k$ număr natural.**	**3 p**
$\boldsymbol{u(a:5) = u(3^{2n}) = u(3^{4k}) = u(81^k) = u(1^k) = u(1) = 1}$	**4 p**
Punctul c)	
Folosirea rezultatului $a:5 = 3^{2n}$ și rescrierea: $a:5 + 3^{2n+1} = 3^{2n} + 3\cdot 3^{2n}$	**2 p**
Factor comun 3^{2n}: $3^{2n}\cdot(1+3) = 4\cdot 3^{2n}$	**2 p**
Observarea că $4\cdot 3^{2n} = (2\cdot 3^n)^2$, deci este pătrat perfect	**2 p**

PROBLEMA 3 (20 puncte)

Un număr natural de trei cifre împărțit la răsturnatul său dă câtul 3 și restul 175. Diferența dintre cifra sutelor și cifra unităților este 7. Determinați numărul.

GM 9/2025_E: 17287
Ștefan Gobej, elev, Curtea de Argeș

SOLUȚIE/BAREM	Punctaj
Fie numărul natural de trei cifre $\overline{abc}$. $\overline{abc} = 3\cdot\overline{cba} + 175,\ 0 \le 175 < \overline{cba}$ (1)	**5 p**
a=c+7 (2)	**3 p**
Din (1) rezultă $c \ge 1$, iar din (2) rezultă $c \le 2$ (deoarece a este cifră, $a \le 9$). Deci c poate lua doar valorile 1 sau 2. (3)	**2 p**
Facem analiza ultimei cifre în relația $\overline{abc} = 3\cdot\overline{cba} + 175$ și avem $c = u(3a + 5)$ și ținând cont de relația (2) rezultă că $c = u(3(c + 7) + 5)$, adică $c = u(3c + 6)$ (4)	**2 p**
Din (3) și (4) rezultă că doar c=2 convine.	**3 p**
Mergem în (2) și obținem a=9.	**3 p**
Cu a și c determinate mergem în (1) și obținem $\overline{9b2} = 3\cdot\overline{2b9} + 175$. Deci, $900 + 10b + 2 = 3(200 + 10b + 9) + 175 \Rightarrow 902 + 10b = 802 + 30b$ $\Rightarrow 20b = 100 \Rightarrow b = 5$. Deci, $\overline{abc} = 952$	**2 p**
Soluție alternativă: **Fie numărul de trei cifre $\overline{abc}$.** **Atunci $\overline{abc}$=100a+10b+c și $\overline{cba}$=100c+10b+a.**	**5 p**
$\overline{abc} = 3\cdot\overline{cba} + 175,\ 0 \le 175 < \overline{cba}$	**5 p**
100a+10b+c = 3(100c+10b+a)+175. **⇒ 100a+10b+c = 300c+30b+3a+175 ⇒ 97a − 20b − 299c = 175**	**5 p**
a−c=7 ⇒ a=c+7	**2 p**
97(c+7)−20b−299c=175 ⇒ 101c+10b=252. **Cum c este cifră, c=2 ⇒ 10b=50 ⇒ b=5, iar a=9**	**2 p**
Verificare: 952 = 3·259 + 175 **Răspuns: 952**	**1 p**

PROBLEMA 4 (20 puncte)

Într-o cutie sunt bile roșii și bile albastre. Dacă înlocuim fiecare bilă roșie cu 3 bile albastre, numărul total de bile crește cu 2026. Știind că inițial în cutie erau 1500 de bile, determinați câte bile roșii și câte bile albastre erau inițial.

SOLUȚIE/BAREM	Punctaj
La fiecare înlocuire a unei bile roșii cu trei bile albastre numărul total de bile din cutie crește cu două bile.	**8 p**
Cum, după înlocuirea tuturor bilelor roșii, numărul total de bile a crescut cu 2026 înseamnă că au fost făcute $2026:2=1013$ înlocuiri, deci numărul inițial de bile roșii din cutie era 1013.	**7 p**
Numărul inițial de bile albastre din cutie era $1500-1013=487$. *Răspuns:* Inițial erau 1013 bile roșii și 487 bile albastre.	**5 p**
<u>Soluție alternativă:</u> **Notăm cu R numărul de bile roșii și cu A numărul de bile albastre (inițial).**	**2 p**
Condiția „inițial erau 1500 de bile” **R + A = 1500**	**5 p**
Condiția „numărul total crește cu 2026” **La înlocuire, fiecare bilă roșie dispare și apar 3 bile albastre. Deci, pentru fiecare bilă roșie, numărul total de bile crește cu 2 (pentru că 3 − 1 = 2). Dacă avem R bile roșii, creșterea totală este 2R. Cum creșterea este 2026, obținem: 2R = 2026.**	**6 p**
Din 2R = 2026 rezultă R = 2026 : 2 = 1013. Apoi din R + A = 1500 rezultă A = 1500 − 1013 = 487.	**5 p**
Verificare **Inițial sunt 1013 bile roșii și 487 bile albastre (în total 1500). După înlocuire, bilele albastre devin 487 + 3·1013 = 487 + 3039 = 3526, deci totalul crește cu 3526 − 1500 = 2026, exact cât trebuie.** ***Răspuns:*** **Inițial erau 1013 bile roșii și 487 bile albastre.**	**2 p**